Maîtriser la notion d'inégalité, de valeur approchée ou d'encadrement par des exercices résolus

Exercice 1 — SF1

Donner un encadrement à $0{,}001$ près du nombre réel π.
Quelle est l'amplitude de cet encadrement ?

Exercice 2 — SF1

Sachant que $-4{,}16$ est une valeur approchée de x à 10^{-2} près, donner un encadrement de x.

Exercice 3 — SF2

Déterminer une valeur approchée par excès à 10^{-3} près du réel $x = \frac{8}{13}$.

Exercice 4 — SF1

Donner un encadrement d'amplitude $0{,}001$ pour $x = \frac{129}{17}$ et $y = -\frac{23}{37}$.

Exercice 5 — SF2

Sachant que $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$ et $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, donner un encadrement de $a = \sqrt{5} - \pi$.
Quelle est l'amplitude de cet encadrement ?

Exercice 6 — SF4

On donne : $\begin{cases} 3{,}6 \leq x \leq 4{,}7 \\ -7{,}2 \leq y \leq -7 \end{cases}$

Donner des encadrements des nombres :

(a) $x + y$ | (b) $x - y$ | (c) $y - x$ | (d) $-x - y$ | (e) $x \cdot y$

Exercice 7 — SF4

On donne : $\begin{cases} 3{,}2 \leq x \leq 4 \\ -2 \leq y \leq -1 \end{cases}$

Trouver un encadrement de $\frac{1}{y}$, $x \cdot y$ et $\frac{x}{y}$.

Exercice 8 — SF4

On donne : $\begin{cases} -0{,}3 \leq x \leq 0{,}1 \\ -0{,}4 \leq y \leq 0{,}2 \end{cases}$

Donner un encadrement de $x \cdot y$.

Exercice 9 — SF4

On donne : $\begin{cases} -5 \leq x \leq -2 \\ 1 \leq y \leq 3 \\ -5 \leq z \leq -1 \end{cases}$

Donner un encadrement de :

(a) $-3 \cdot (x^2 - 2z)$ | (b) $\frac{2x+4z}{y}$

Exercice 10 — SF5

On sait que : $\begin{cases} -3 \leq x + y \leq -\frac{1}{5} \\ -5 \leq x - y \leq -2 \end{cases}$

En déduire un encadrement de x, puis un encadrement de y.

Exercice 11 SF5

On sait que : $\begin{cases} -6 \leq 3x - 2y \leq 1 \\ 10 \leq 2x + 3y \leq 14 \end{cases}$

En déduire un encadrement de x, puis un encadrement de y.

Exercice 12 SF4

Un terrain rectangulaire a une largeur comprise entre 23 et 24 mètres et une longueur comprise entre 54 et 55 mètres. Donner un encadrement de l'aire et du périmètre du terrain.

Exercice 13 SF4

Une balance est sensible à 0,1 grammes près. On mesure la masse m d'un liquide comme différence de deux pesées p_1, celle du liquide et de l'emballage et p_2, celle de l'emballage uniquement.
On trouve $p_1 = 781{,}5$ g et $p_2 = 119{,}2$ g. Que peut-on dire de la masse du liquide ?

Exercice 14 SF4

On sait que $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2$.
Si a est très petit, alors a^2 est négligeable et l'on peut écrire que $(1 + a)^2 \cong 1 + 2a \quad (A)$
Comment choisir a pour que cette erreur soit inférieure à 10^{-6} ?
Calculer $(1{,}0435)^2$ et $(1{,}00093)^2$ par "l'approximation" (A).
Préciser la valeur approchée obtenue !

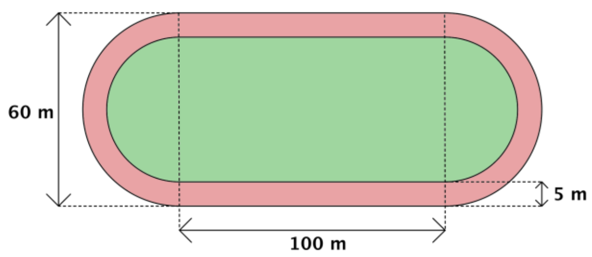
Exercice 15 SF4

Notre bibliothèque scolaire comprend entre 15 000 et 18 000 livres. Le déménagement est prévu dans des caisses qui contiennent entre 20 et 30 livres. On voudrait déterminer le nombre de caisses à prévoir pour ce déménagement.

1. Donner d'abord un encadrement du nombre cherché.
2. De combien de caisses aura-t-on besoin ?

Exercice 16 SF4

Voici le schéma d'un



stade.
Sachant que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, donner un encadrement de l'aire de la pelouse et de l'aire de la piste.

Solutions

Exercice 1

$\pi = 3{,}14159\ldots$ donc un encadrement de π à 10^{-3} près est $3{,}141 \leq \pi \leq 3{,}142$ et l'amplitude de l'encadrement est $0{,}001$

Exercice 2

$-4{,}16 - 0{,}001 \leq x \leq -4{,}16 + 0{,}001$

$\Leftrightarrow 4{,}161 \leq x \leq -4{,}159$

Amplitude : $0{,}002$

Exercice 3

$x = 0{,}6153846 \ldots$

donc $0{,}615 \leq x \leq 0{,}616$

Valeur approchée par excès à 10^{-3} près : $0{,}616$

Exercice 4

$x = 7{,}5882352\ldots$

donc $7{,}588 \leq x \leq 7{,}589$

$y = -0{,}621621\ldots$

donc $-0{,}622 \leq y \leq -0{,}621$

Exercice 5

$$\begin{array}{c|l} 2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24 & (+) \\ -3{,}15 < -\pi < -3{,}14 & \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow -0{,}92 < \sqrt{5} - \pi < -0{,}9$

$\Leftrightarrow -0{,}92 < a < -0{,}9$

Exercice 6

(a)

$$\begin{array}{c|l} 3{,}6 \leq x \leq 4{,}7 & (+) \\ -7{,}2 \leq y \leq -7 & \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow -3{,}6 \leq x + y \leq -2{,}3$

(b)

$$\begin{array}{c|l} 3{,}6 \leq x \leq 4{,}7 & (+) \\ 7 \leq -y \leq 7{,}2 & \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow 10{,}6 \leq x - y \leq 11{,}9$

(c) $y - x = (-1) \cdot (x - y)$

d'où : $-11{,}9 \leq y - x \leq -10{,}6$ (utiliser (b))

(d) $-x - y = (-1) \cdot (x + y)$

d'où : $2{,}3 \leq -x - y \leq 3{,}6$ (utiliser (a))

(e)

$$\begin{array}{c|l} 3{,}6 \leq x \leq 4{,}7 & (\cdot) \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ 7 \leq -y \leq 7{,}2 & \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow 25{,}2 \leq -x \cdot y \leq 33{,}84 \qquad | \cdot (-1)$

$\Leftrightarrow -33{,}84 \leq x \cdot y \leq -25{,}2$

Exercice 7

• Encadrement de $\frac{1}{y}$:

$-2 \leq y \leq -1 \qquad | \cdot (-1)$

$\Leftrightarrow 1 \leq -y \leq 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{y} \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{2}$

• Encadrement de $x \cdot y$:

$$\begin{array}{c|l} 3{,}2 \leq x \leq 4 & (\cdot) \\ 1 \leq -y \leq 2 & \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow 3{,}2 \leq -x \cdot y \leq 8 \qquad | \cdot (-1)$

$\Leftrightarrow -8 \leq x \cdot y \leq -3{,}2$

• Encadrement de $\frac{x}{y}$:

$$\begin{array}{c|l} 3{,}2 \le x \le 4 & (\cdot) \\ \frac{1}{2} \le -\frac{1}{y} \le 1 & \\ \hline \Rightarrow 1{,}6 \le -\frac{x}{y} \le 4 & |\cdot(-1) \\ \Leftrightarrow -4 \le \frac{x}{y} \le -1{,}6 & \end{array}$$

Exercice 8

Il faut distinguer quatre cas suivant les signes de x et y :

1^er^ cas :

$$\begin{array}{c|l} -0{,}3 \le x \le 0 & |\cdot(-1) \\ -0{,}4 \le y \le 0 & |\cdot(-1) \\ \hline 0 \le -x \le 0{,}3 & (\cdot) \\ 0 \le -y \le 0{,}4 & \\ \hline \Rightarrow 0 \le x \cdot y \le 0{,}12 & (I) \end{array}$$

2^e^ cas :

$$\begin{array}{c|l} -0{,}3 \le x \le 0 & |\cdot(-1) \\ 0 \le y \le 0{,}2 & \\ \hline 0 \le -x \le 0{,}3 & (\cdot) \\ 0 \le y \le 0{,}2 & \\ \hline \Rightarrow 0 \le -x \cdot y \le 0{,}06 & |\cdot(-1) \\ \Leftrightarrow -0{,}06 \le x \cdot y \le 0 & (II) \end{array}$$

3^e^ cas :

$$\begin{array}{c|l} 0 \le x \le 0{,}1 & \\ -0{,}4 \le y \le 0 & |\cdot(-1) \\ \hline 0 \le x \le 0{,}1 & (\cdot) \\ 0 \le -y \le 0{,}4 & \\ \hline \Rightarrow 0 \le -x \cdot y \le 0{,}04 & |\cdot(-1) \\ \Leftrightarrow -0{,}04 \le x \cdot y \le 0 & (III) \end{array}$$

4^e^ cas :

$$\begin{array}{c|l} 0 \le x \le 0{,}1 & (\cdot) \\ 0 \le y \le 0{,}2 & \\ \hline \Rightarrow 0 \le x \cdot y \le 0{,}02 & (IV) \end{array}$$

A partir des encadrements (I), (II), (III) et (IV), on déduit que : $-0{,}06 \le x \cdot y \le 0{,}12$

Exercice 9

(a)

$$\begin{array}{c|l} 2 \le -x \le 5 & (\cdot) \\ 2 \le -x \le 5 & \\ \hline \Rightarrow 4 \le x2 \le 25 & (I) \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} -5 \le z \le -1 & |\cdot(-2) \\ \Leftrightarrow 2 \le -2z \le 10 & (II) \end{array}$$

Or $(I) + (II)$:

$$\begin{array}{cl} \Rightarrow 6 \le x2 - 2z \le 35 & |\cdot(-3) \\ \Leftrightarrow -105 \le -3 \cdot (x2 - 2z) \le -18 & \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{c|l} -10 \le 2x \le -4 & (+) \\ -20 \le 4z \le -4 & \\ \hline \Rightarrow -30 \le 2x + 4z \le -8 & |\cdot(-1) \\ \Leftrightarrow 8 \le -(2x + 4z) \le 30 & (III) \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} 1 \le y \le 3 & \\ \Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{1}{y} \le 1 & (IV) \end{array}$$

Or $(III) \cdot (IV)$:

$$\begin{array}{cl} \Rightarrow \frac{8}{3} \le -\frac{2x+4z}{y} \le 30 & |\cdot(-1) \\ \Leftrightarrow -30 \le \frac{2x+4z}{y} \le -\frac{8}{3} & \end{array}$$

Exercice 10

• Encadrement de x :

$$\begin{array}{rcl|l} -3 \leq x + y \leq -\frac{1}{5} & & & (+) \\ -5 \leq x - y \leq -2 & & & \\ \hline \Rightarrow -8 \leq 2x \leq -\frac{11}{5} & & & \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow -4 \leq x \leq -\frac{11}{10} & & & \end{array}$$

• Encadrement de y :

$$\begin{array}{rcl|l} -3 \leq x + y \leq -\frac{1}{5} & & & (+) \\ 2 \leq -x + y \leq 5 & & & \\ \hline \Rightarrow -1 \leq 2y \leq \frac{24}{5} & & & \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{12}{5} & & & \end{array}$$

Exercice 11

• Encadrement de x :

$$\begin{array}{l|l} -6 \leq 3x - 2y \leq 1 & \mid \cdot 3 \\ 10 \leq 2x + 3y \leq 14 & \mid \cdot 2 \\ \hline -18 \leq 9x - 6y \leq 3 & (+) \\ 20 \leq 4x + 6y \leq 28 & \\ \hline \Rightarrow 2 \leq 13x \leq 31 & \mid \cdot \frac{1}{13} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{13} \leq x \leq \frac{31}{13} & \end{array}$$

• Encadrement de y :

$$\begin{array}{l|l} -6 \leq 3x - 2y \leq 1 & \mid \cdot 2 \\ 10 \leq 2x + 3y \leq 14 & \mid \cdot (-3) \\ \hline -12 \leq 6x - 4y \leq 2 & (+) \\ -42 \leq -6x - 9y \leq -30 & \\ \hline \Rightarrow -54 \leq -13y \leq 28 & \mid \cdot \left(-\frac{1}{13}\right) \\ \Leftrightarrow -\frac{28}{13} \leq x \leq \frac{54}{13} & \end{array}$$

Exercice 12

$54 < L < 55$

$23 < l < 24$

Encadrement de l'aire :

$54 \cdot 23 < L \cdot l < 55 \cdot 24$

$\Leftrightarrow 1242 < L \cdot l < 1320$ (en m²)

Encadrement du périmètre :

$54 + 23 < L + l < 55 + 24$

$\Leftrightarrow 77 < L + l < 79 \qquad \mid \cdot 2$

$\Leftrightarrow 154 < 2 \cdot (L + l) < 158$ (en mètres)

Exercice 13

$$781{,}5 - 0{,}1 < p_1 < 781{,}5 + 0{,}1$$
$$\Leftrightarrow 781{,}4 < p_1 < 781{,}6$$

$$119{,}2 - 0{,}1 < p_2 < 119{,}2 + 0{,}1$$
$$\Leftrightarrow 119{,}1 < p_2 < 119{,}3$$

Ainsi :

$$\begin{array}{c|l} 781{,}4 < p_1 < 781{,}6 & (+) \\ -119{,}3 < -p_2 < -119{,}1 & \\ \hline \Rightarrow 662{,}1 < p_1 - p_2 < 662{,}5 & \end{array}$$

d'où : $662{,}1 < m < 662{,}5$ (en grammes)

Exercice 14

Soit a l'erreur commise.

a) Si $0 < a < 10^{-3}$ alors $0 < a^2 < 10^{-6}$. L'erreur est inférieure à 10^{-6} si a est inférieur à 10^{-3}.

b) $(1{,}0435)^2 = (1 + 0{,}0435)^2 = 1{,}08889225$

$1 + 2 \cdot 0{,}0435 = 1{,}087 \qquad (a = 0{,}0435)$

$0 < a < 0{,}1$, on obtient une valeur approchée $1{,}08$ à 10^{-2} près.

$(1{,}00093)^2 = (1 + 0{,}00093)^2$

$\qquad = 1{,}0018608649$

$1 + 2 \cdot 0{,}00093 = 1{,}001860$

$(a = 0{,}00093)$

Exercice 15

Soit n le nombre de caisses à prévoir, l le nombre de livres et c le nombre de livres par caisse.

L'énoncé se traduit par :

$$15\,000 < l < 18\,000$$
$$20 < c < 30$$

On cherche un encadrement de $n = \frac{l}{c}$, n étant entier.

$$\begin{array}{c|l} 15\,000 < l < 18\,000 & (\cdot) \\ \frac{1}{30} < \frac{1}{c} < \frac{1}{20} & \\ \hline \Rightarrow \frac{15\,000}{30} < \frac{l}{c} < \frac{18\,000}{20} & \\ \Leftrightarrow 500 < n < 900 & \end{array}$$

On prévoit un maximum de 900 caisses.

$0 < a < 0{,}001$, on obtient une valeur approchée $1{,}001860$ à 10^{-6} près.

Exercice 16

Aire de la pelouse (A_p) :

rayon du petit disque : $r = \frac{50}{2} = 25\ m$

Aire des deux demi-disques :

$A_1 = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 625 = 625 \cdot \pi$

$3{,}14 < \pi < 3{,}15$

$\Leftrightarrow\ 1962{,}5 < A_1 < 1968{,}75$

Aire du rectangle intérieur :

$100 \cdot 50 = 5000$ m²

Aire de la pelouse : $A_p = A_1 + 5000$

d'où : $1962{,}5 < A_1 < 1968{,}75$

$\Leftrightarrow\quad 6962{,}5 < A_p < 6968{,}75$

Aire de la piste (A) :

Aire des deux demi-disques :

$A_2 = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 30^2 = 900 \cdot \pi$

$900 \cdot 3{,}14 < A_2 < 900 \cdot 3{,}15$

$\Leftrightarrow\quad 2826 < A_2 < 2835\quad (I)$

Aire du rectangle extérieur :

$60 \cdot 100 = 6000$ m²

Aire totale du stade A_s :

$8826 < A_2 + 6000 < 8835$

$\Leftrightarrow\quad 8826 < A_s < 8835\quad (II)$

Aire de la piste : $A = A_s - A_p$:

$$\begin{array}{c|c} 8826 < A_s < 8835 & (+) \\ -6968{,}75 < -A_p < -6962{,}5 & \\ \hline \Rightarrow 1857{,}25 < A < 1872{,}5 & \end{array}$$